



## DINAMINIS STOCHASTINIS IMITACINIS MODELIAVIMAS SUDARANT TVARŲ PENSIJOS PORTFELĮ ESANT STOCHASTINEI GYVENIMO TRUKMEI

Aušra Klimavičienė

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
El. paštas [ausra\\_klimaviciene@yahoo.com](mailto:ausra_klimaviciene@yahoo.com); [finansu.katedra@vgtu.lt](mailto:finansu.katedra@vgtu.lt)*

*Įteikta 2010-05-29; priimta 2010-08-01*

**Santrauka.** Straipsnyje nagrinėjami tvaraus pensijos portfelio sudarymo metodai. Dauguma ankstesnių mokslinių pensijos portfelio tvarumo tyrimų buvo atliekama esant pastoviam planuojamam pensijos laikotarpiui. Siekiant atspindėti stochastinę asmens gyvenimo trukmės prigimtį, skaičiuojant taikomi dinaminiai stochastiniai imitaciniai modeliai, į kuriuos įtraukiama ir tikimybė asmeniui išgyventi dar vienerius metus, modeliuojama remiantis Lietuvos gyventojų mirtingumo lentelėmis. Straipsnyje siekiama išanalizuoti pensijos portfeliui sudaryti taikomus metodus naudojantis dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo galimybėmis. Straipsnyje pristatomi pensijos portfelio sudarymo metodų tyrimo rezultatai, pateikiamos metodų taikymo praktikoje rekomendacijos.

**Reikšminiai žodžiai:** tvarus pensijos portfelis, stochastinė gyvenimo trukmė, stochastinis optimizavimas, portfelio poreikvojimo tikimybė.

## USING DYNAMIC STOCHASTIC SIMULATION TO DETERMINE ASSET ALLOCATION OF SUSTAINABLE RETIREMENT PORTFOLIO FOR A STOCHASTIC LIFETIME

Aušra Klimavičienė

*Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
E-mail: [ausra\\_klimaviciene@yahoo.com](mailto:ausra_klimaviciene@yahoo.com); [finansu.katedra@vgtu.lt](mailto:finansu.katedra@vgtu.lt)*

*Received 29 May 2010; accepted 1 August 2010*

**Abstract.** The article examines the problem of determining asset allocation of sustainable retirement portfolio. Former researches used to analyse the fixed retirement planning horizon. Seeking to reflect the stochastic nature of the human lifespan the dynamic stochastic simulation models used for calculations are updated to incorporate the probability of living another year based on Lithuanians' mortality tables. The article presents the attempts to analyse the methods used to identify the optimal asset allocation of retirement portfolio using dynamic stochastic simulation techniques. The research results are presented and the recommendations for the practical application of the methods to determine asset allocation of sustainable retirement portfolio are provided.

**Keywords:** sustainable retirement portfolio, stochastic retirement lifespan, methods to determine asset allocation of retirement portfolio, stochastic optimization, probability of retirement portfolio ruin.

## 1. Įvadas

Mokslininkų dėmesys, skiriamas optimalaus ir tvaraus pensijos portfelio problemai, nuolat auga. Tobulėjant skaičiavimo technologijoms ir imitacinio modeliavimo technikai sudėtingų finansų valdymo strategijų modeliavimas tampa vis labiau prieinamesnis. Pensijos planavimas, pensijos portfelio valdymas ypatingas tuo, kad jis dažnai apima ilgą laikotarpį, skaičiuojamą dešimtmečiais. Investicijų grąžos stochastiškumas jau seniai pripažįstamas ir įvertinamas imitaciniuose modeliuose, tačiau stochastinė asmens gyvenimo prigimtis šiandien vis dar retai įvertinama planuojant ir modeliuojant finansinius ilgo laikotarpio produktus. Dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo galimybės atveria kelius visapusiškai įvertinti pensijos portfelio investavimo strategijos efektyvumą, sudaryti optimalų pensijos portfelį. Optimalaus pensijos portfelio sudarymas – aktuali, menkai ištirta sritis, kuri tampa kasdien vis svarbesnė.

Šio straipsnio tikslas – išanalizuoti pensijos portfeliumi sudaryti taikomus metodus, naudojantis dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo galimybėmis ir įvertinant stochastinę asmens gyvenimo trukmės prigimtį, pateikti metodų taikymo praktikoje rekomendacijų, siekiant užtikrinti didžiausią galimą portfelio tvarumą.

## 2. Aktualių mokslinių tyrimų apžvalga

Pensijos portfelio tvarumo problemą tyrė nemažai mokslininkų, tačiau dauguma jų siekė nustatyti ne optimalią portfelio sudėtį, o didžiausią galimą iš portfelio išimti sumą. Mažai autorių analizavo pensijos portfelio tvarumą esant tikimybinei asmens gyvenimo trukmei, dar mažiau mokslininkų tyrė optimalią portfelio sudėtį ir jos nustatymo metodus. Nesant aiškios metodologijos ar vengiant sudėtingų matematinių skaičiavimų nustatant optimalų portfelį, esant tam tikrai išėmimo normai ir planavimo horizontui, ankstesni tyrimai apsiribodavo išėmimo normų ir tam tikrų portfelio sudėčių derinių nustatymu tam tikram pastoviam pensijos laikotarpiui. Tarp tokių paminėtini Bengen (1994, 1996, 2001), Cooley *et al.* (1998, 1999, 2001, 2003), Ameriks *et al.* (2001), Weiss (2001), Terry (2003), Tezel (2004), Spitzer *et al.* (2007), Spitzer (2008) ir kiti.

Dauguma autorių skaičiuoja tikimybę, kad portfelis bus išnaudotas per tam tikrą laikotarpį, o paskui gautas rezultatas lyginamas su tikėtina asmens gyvenimo trukme. Tačiau tikimybė menka, kad žmogaus gyvenimo trukmė bus lygi tikėtinajai trukmei. Anot Smith ir Gould (2007), taip, kaip imitaciniame modelyje pranašiau yra daryti prielaidą apie turto klasių kaupimo faktorių pasiskirstymus, negu tikėtis, kad metinės grąžos bus lygios istoriniam vidurkiui, lygiai taip pat efektyviau yra naudoti metines mirtingumo tikimybes, negu teigti, kad kiekvienas su tikėtina 20-ies metų likusio gyvenimo trukme gyvens lygiai 20 metų. Dėl to, siekiant perteikti asmens gyvenimo trukmės neapibrėžtumą, į stochastinius modelius reikia įtraukti ir stochastinę

asmens gyvenimo trukmę. Tai bandę padaryti Ho *et al.* (1994) sukūrė modelį optimaliai portfelio, sudaryto iš dviejų aktyvų – rizikingo ir nerizikingo turto, struktūrai nustatyti minimizuojant portfelio poreikvojimo tikimybę, t. y. kad portfelis bus nepakankamas finansuoti išėmimus iš jo visą pensijos laikotarpį. Remdamiesi kanadiečių mirtingumo ir finansinio turto grąžos duomenimis, jie padarė išvadą, kad akcijų kaip rizikingo turto dalis portfelyje pensiniame amžiuje turėtų būti daug didesnė (nuo 75 % iki 100 %), nei iki tol buvo galvojama. Remdamiesi prielaida, kad metinės grąžos pasiskirsčiusios pagal normalųjį pasiskirstymą su akcijų 8 % vidurkiu ir 17 % standartiniu nuokrypiu (išdo vekseliams atitinkamai 2 % ir 3,5 %), mokslininkai nustatė optimalią 71 % akcijų dalį vyrams ir 89,3 % moterims, atitinkančią 6,25 % išėmimo normą. Vėliau Milevsky *et al.* (1997) praplėtė ankstesnį tyrimą, finansų rinkų grąžą pagal lognormalųjį skirstinį ir tikėtiną gyvenimo trukmę modeliuodami Monte Karlo imitacinio modeliavimo metodu. Tyrimo rezultatai dar kartą patvirtino, kad akcijų dalis portfelyje pensiniame amžiuje turėtų būti didesnė, nei mokslininkai siūlė iki tol.

Milevsky ir Robinson (2005) sujungia lognormalųjį grąžos skirstinį ir mirtingumo tikimybės eksponentinį pasiskirstymą, skaičiuodami stochastinę dabartinę vertę, reikalingą tvaraus vartojimo pensijos laikotarpiui užtikrinti. Stout ir Mitchell (2006), remdamiesi Guyton (2004) pristatytomis sprendimo priėmimo taisyklėmis išėmimams iš portfelio pensijos laikotarpiu vykdyti, sukūrė dinamišką išėmimų planavimo modelį, fiksuotą planuojamą pensijos laikotarpį pakeisdami tikėtina gyvenimo trukme. Aktyvus dinamiškas išėmimų valdymas, paremtas portfelio rezultatais ir tikėtina gyvenimo trukme, leido pasiekti didesnes vidutines išėmimų iš portfelio sumas su mažesne portfelio poreikvojimo tikimybe. Vėliau Mitchell (2009) pratęsė tyrimus su papildytais rinkų duomenimis, parodydamas, kaip pastarųjų metų rinkų kritimas paveikia tyrimų rezultatus.

Stout (2008) optimalios portfelio sudėties problemai pritaikė stochastinio optimizavimo algoritmą, siekdamas minimizuoti portfelio poreikvojimo tikimybę per asmens gyvenimą, kurio trukmė yra stochastinis dydis, o tikimybė išgyventi dar vienerius metus gali būti aprašyta naudojant binominį skirstinį. Portfelio poreikvojimo tikimybė ir akcijų dalis portfelyje didėja didinant išėmimo normą ir, atvirkščiai, kuo vyresnis asmuo išeina į pensiją, tuo akcijų dalis portfelyje ir portfelio poreikvojimo tikimybė mažesnė. Stout (2008) tyrimo metodika pagrįsti disertanto sudaryti dinaminiai stochastiniai imitaciniai modeliai ir jais gauti tyrimo rezultatai plačiau pateikti 3–4 dalyse.

Apžvelgus mokslininkų atliktų tyrimų rezultatus galima daryti išvadą, kad nėra bendros pensijos portfelio sudarymo ir valdymo metodikos, tačiau egzistuoja daug galimų portfelio valdymo strategijų bei taisyklių, kurios yra pagrindinių pensijos portfelio sudarymo metodų variacijos.

Šiame straipsnyje atkreipsime dėmesį į esminius pensijos portfelio sudarymo metodus, į dinaminis stochastinius imitacinius modelius įtrauksime asmens gyvenimo trukmę kaip stochastinį kintamąjį.

Šio straipsnio tikslas – naudojantis dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo ir stochastinio optimizavimo galimybėmis išnagrinėti optimalios pensijos portfelio sudėties nustatymo metodus esant stochastinei asmens išgyvenimo kitais metais tikimybei, nustatyti optimalią pensijos portfelio sudėtį ir pateikti nagrinėjamų metodų taikymo praktikoje rekomendacijų.

### 3. Tvaraus pensijos portfelio sudarymas esant stochastinei asmens gyvenimo trukmei

#### 3.1. Tyrimo metodika

Pensijos portfelio sudarymo metodams analizuoti pasitelkiama dinaminio Monte Karlo imitacinio modeliavimo technika, kuria skaičiuojama tikimybė, kad portfelio vertė pensijos laikotarpiu taps lygi nuliui, kitaip tariant, portfelis bus pereikvotas anksčiau negu planuota (toliau – pereikvojimo tikimybė). Tiriami šie metodai: euristinis, daugelio horizontų ir stochastinio optimizavimo metodai.

Euristinis metodas – tai apytikslis pensijos portfelio sudėties nustatymo metodas, pagal kurį akcijų dalis portfelyje nustatoma remiantis populiariaja „100 minus investuotojo amžius“ taisykle. Tai reiškia, kad, pavyzdžiui, 35 % 65-erių metų asmens portfelio turėtų sudaryti akcijos, o likusią dalį – obligacijos ar kiti mažiau rizikingi aktyvai.

Cordell (2005) pasiūlytas daugelio horizontų metodas pensijos portfelio sudėčiai nustatyti paremtas prielaida, kad asmuo valdo portfelį, susidedantį iš kelių ar keliasdešimt portfelių, turinčių skirtingą investicijų horizontą. Portfeliai investuojami į skirtingos rizikos aktyvus tam tikru santykiu, kuris priklauso nuo investicijų horizonto atskiram portfeliui. Pensijos portfelio, kaip skirtingos trukmės portfelių visumos, sudėtis nustatoma remiantis pinigų laiko vertės koncepcija.

Stochastinis optimizavimas nusako tikslo funkcijos su stochastinės prigimties kintamaisiais optimizavimą. Didėjant Monte Karlo imitacinio modeliavimo poreikiui, vis dažniau imitacinio modeliavimo programinių priemonių gamintojai į jas įtraukia stochastinio optimizavimo procedūros galimybę. Stochastinio optimizavimo metu imitacinio modeliavimo programinis paketas modelio skaičiavimo rezultatus (išvestį) naudoja kaip optimizavimo algoritmo įvestį.

Kiekvienam šių metodų sudarytas dinaminis stochastinis imitacinis modelis, kuris jungia stochastinę akcijų ir obligacijų grąžų prigimtį ir įvertina asmens gyvenimo trukmę kaip stochastinį dydį. Kiekvienos simuliacijos metu modelis generuoja 20 000 realizacijų ir viena portfelio per-

eikvojimo tikimybė (realizacijų, kai portfelio vertė tampa lygi 0, skaičius, padalintas iš bendro realizacijų skaičiaus).

Įsivaizduokime asmenį, kuris netrukus išeis į pensiją. Tarkime, kad asmuo turi sukaukęs tam tikrą sumą pinigų. Kasmet asmuo išima iš portfelio pastovią procentinę pradinio portfelio vertės dalį vartojimui, tad pensijos laikotarpį asmuo pradeda išimdamas iš portfelio tam tikrą sumą, o likutį investuoja į akcijas ir vidutinės trukmės vyriausybės obligacijas tam tikru santykiu, kurį nustato remdamasis pirmiau paminėtais metodais. Asmuo siekia, kad portfelio pakaktų planuojamam pensijos laikotarpiui. Reikia nustatyti optimalią pensijos portfelio struktūrą, kuri užtikrintų, kad tikimybė, jog portfelio vertė taps lygi nuliui (toliau – pereikvojimo tikimybė), būtų minimali, ir palyginti skirtingais metodais gautus rezultatus.

Tiriami keli skirtingi scenarijai amžiaus ir išimamos iš portfelio sumos aspektais. Asmuo išsina į pensiją būdamas 55, 60, 65, 70 metų. Tikimybė išgyventi dar vienerius metus kiekvienais pensijos laikotarpio metais tampa vis mažesnė. Išimti iš portfelio lėšų galima tik tuomet, kai asmuo gyvas, o portfelio vertė teigiama. Tiriamos 3,0 %, 3,5 %, 4,0 %, 4,5 %, 5,0 %, 5,5 %, 6,0 %, 6,5 %, 7,0 %, 7,5 %, 8,0 %, 8,5 %, 9,0 %, 9,5 %, 10,0 % išėmimo normos. Kasmet iš portfelio išimama suma laikoma pakoreguota pagal infliaciją, nes modelyje naudojamos realios turto klasių grąžos. Išėmimo norma yra fiksuota ir nekinta per nagrinėjamą pensijos laikotarpį.

Nagrinėjamą hipotetinį portfelį sudaro dvi turto klasės: akcijos ir vidutinės trukmės JAV Vyriausybės obligacijos. Šių turto klasių metinės realios grąžos atsitiktinai generuojamos taikant modelį, išlaikant istorinę koreliaciją tarp akcijų ir vidutinės trukmės JAV Vyriausybės obligacijų. Modelio parametrus nustatyti analizuojami 1926–2009 metų istoriniai akcijų ir vidutinės trukmės JAV Vyriausybės obligacijų grąžų duomenys. Sudarant modelį daroma prielaida, kad turto klasių vienerių metų kaupimo daugiskliai pasiskirstę lognormaliai. Ši prielaida patikrinta skaičiuojant istorines logaritmines grąžas bei Kolmogorovo-Smirnovo testu tikrinant, ar minėtų grąžų skirstiniai skiriasi nuo normalaus pasiskirstymo. Į modelį įtrauktų atsitiktinių dydžių atsitiktiniai pasiskirstymai buvo modeliuoti LHS (*Latin Hypercube Sampling*) metodu, taikant imitacinį modelį ir generuojant atsitiktinius dydžius. Remiantis neparametrinio Kolmogorovo-Smirnovo Z testo rezultatais daroma prielaida, kad remiantis istoriniais duomenimis nustatyti akcijų ir obligacijų kaupimo daugisklių skirstinių parametrai tinkamai apibūdina galimas ateities turto klasių realių grąžų trajektorijas.

Dinaminiai stochastiniai imitaciniai modeliai turi du būsenos kintamuosius: „LYGUS 0“, tikrinantį, ar portfelio vertė netampa lygi nuliui, ir „GYVAS“, nusakantį, ar asmuo laikotarpiu  $t$  dar yra gyvas. Pagal LR draudimo priežiūros komisijos parengtas Lietuvos gyventojų mirtingumo lenteles naudojant binominį skirstinį kiekvienais pensijos

laikotarpio metais modeliuojama tikimybė išgyventi dar vienerius. Priklausomai nuo atitinkamų metų statistinės tikimybės, būsenos kintamasis „GYVAS“ įgyja reikšmes „teisinga“ arba „klaidinga“. Siekiant gautų rezultatų palyginamumo su ankstesnių tyrimų rezultatais bei rezultatais, gautais esant fiksuotam pensijos planavimo horizontui, vyrų ir moterų mirtingumo lenteles apibendrinamos apskaičiuojant tikimybių vidurkius. Pensijos portfelio sudėties nustatymo metodus taikant praktikoje siūloma naudoti atskiras vyrų ir moterų mirtingumo lenteles dėl didesnio rezultatų patikimumo.

Modelyje daroma prielaida, kad tikimybė išgyventi dar vienerius metus nuo 55 iki 60 metų lygi 1 (būsenos kintamasis „GYVAS“ visuomet įgis reikšmę „teisinga“), o išgyvenimo tikimybė daugiau nei 101 metus visuomet lygi 0 (būsenos kintamasis „GYVAS“ visuomet įgis reikšmę „klaidinga“). Stochastinio optimizavimo metu taikomas *Box* metodas. Stochastiškai optimizuojant siekiama rasti tokią optimalią portfelio, sudaryto iš dviejų aktyvų, sudėtį, kuriai esant tikimybė, kad portfelis bus pereikvotas anksčiau nei žmogus mirs, būtų minimali. Gautos optimalios akcijų dalys esant įvairioms išėmimo normoms ir pensijos laikotarpio trukmėms toliau testuojamos naudojant tam tikslui parengtą dinaminį stochastinį imitacinį modelį, taip gaunant vidutinės portfelio pereikvojimo tikimybės ir jos standartinio nuokrypio statistikas, taip pat ir vidutinio galutinės ir pradinės pensijos portfelio vertės santykio bei jo standartinio nuokrypio statistikas.

### 3.2. Tyrimo rezultatai

Naudojant dinaminį stochastinį imitacinį modelį su stochastiniu mirtingumo procesu nustatytos portfelio pereikvojimo tikimybės esant tam tikrai išėmimo normai ir asmens amžiui pensijos laikotarpio pradžioje. Tokiu atveju tikimybė, kad portfelis bus tvarus iki pat asmens mirties, priklauso nuo išėmimo normos, portfelio sudėties, asmens amžiaus pensijos laikotarpio pradžioje, stochastinės gyvenimo trukmės ir stochastinių akcijų bei obligacijų grąžų.

Stochastinio optimizavimo metu gauti optimalūs portfeliai pasižymi mažiausia portfelio pereikvojimo tikimybe. 1 pav. pateiktos portfelio pereikvojimo tikimybės pagal asmens amžių pensijos laikotarpio pradžioje ir taikomą metodą portfelio sudėčiai nustatyti. Visais analizuojamais asmens amžiaus atvejais stochastinio optimizavimo metodu sudarytų portfelio pereikvojimo tikimybių kreivė yra žemiau euristiniu ar daugelio horizontų metodu sudarytų portfelio pereikvojimo tikimybių kreivės.

Mažesnę optimalių portfelio pereikvojimo tikimybę lemia didesnė akcijų dalis, kuri, sudarant portfelį stochastinio optimizavimo būdu, yra didesnė nei euristiniu ar daugelio horizontų metodais. Šių metodų atveju akcijų dalis nuolat mažėja, o daugelio horizontų metodu nustatyta

akcijų dalis paskutinius kelerius asmens gyvenimo metus būna lygi nuliui. Verta priminti, kad optimali akcijų dalis lieka nepakitusi visą pensijos laikotarpį, nesvarbu kokia didelė ji būtų.

Analizuojant vien euristiniu ir daugelio horizontų metodu sudarytų portfelio pereikvojimo tikimybes pastebima, kad asmeniui išėjus į pensiją jaunesniam nei 70-ies metų ir tikintis iš portfelio išimti kasmet daugiau nei 4,0 % pradinės portfelio vertės (atitinkamai 65-erių metų – daugiau nei 5,0 %), daugelio horizontų metodu sudarytas portfelis būtų pranašesnis, kai nėra stochastinio optimizavimo techninių galimybių.

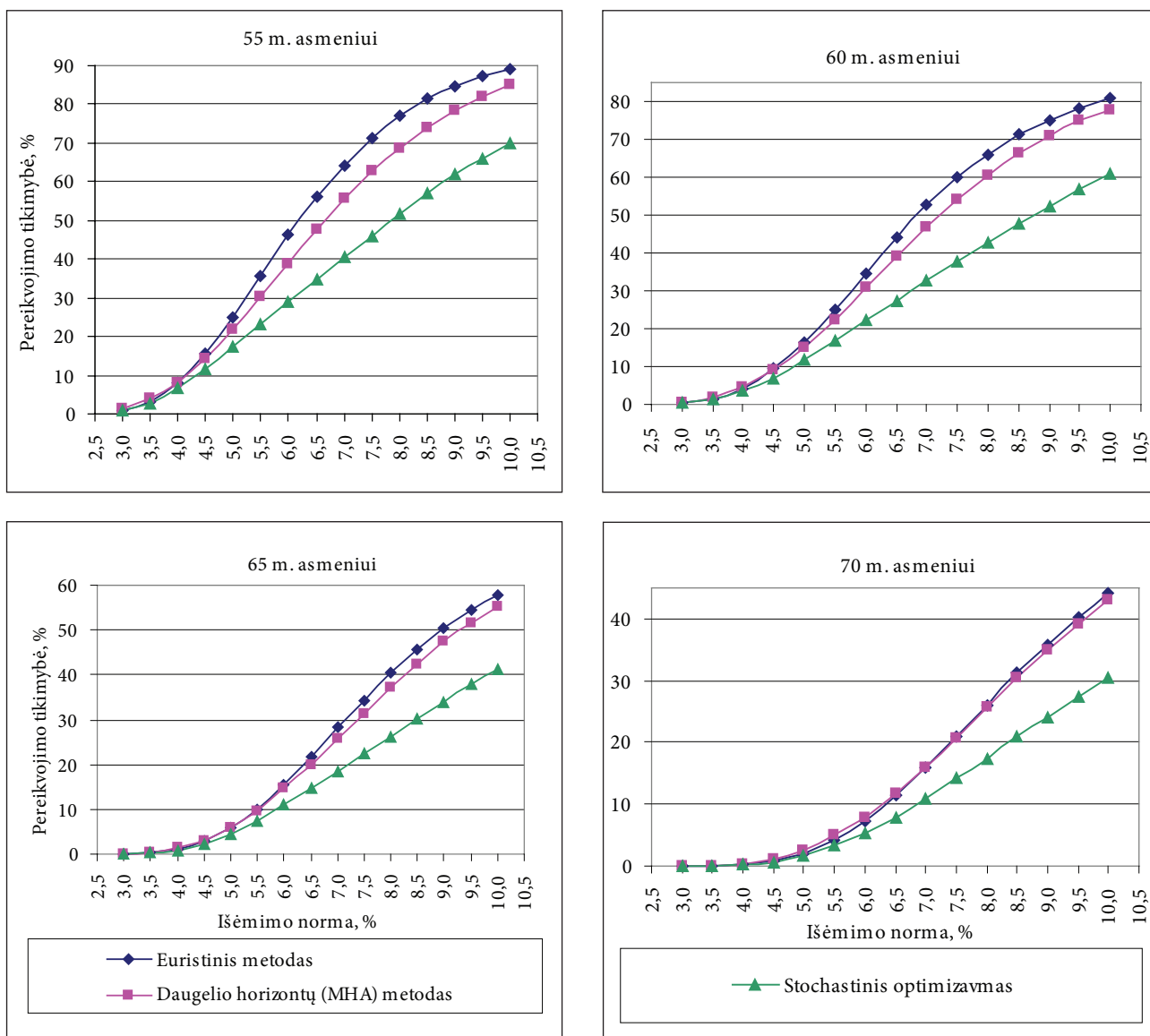
Kai asmuo į pensiją išeina būdamas 70-ies metų, euristiniu ir daugelio horizontų metodais sudaryti portfeliai pereikvojimo tikimybės aspektu yra panašūs, t. y. vidutinė portfelio pereikvojimo tikimybė euristiniu metodu sudarius portfelį yra tik 0,19 procentinio punkto didesnė nei portfelį sudarant daugelio horizontų metodu. Tad šiuo atveju nesant stochastinio optimizavimo galimybės paprasčiausia portfelį būtų sudaryti remiantis euristiniu metodu.

Analizuojant detaliau portfelio pereikvojimo tikimybės, kai iš portfelio kasmet išimamos mažesnės nei 4,5 % pradinės portfelio vertės sumos, pastebima, kad euristinis metodas šiuo atveju nedaug pranašesnis už daugelio horizontų metodą, tačiau esant galimybei visada rekomenduojama taikyti stochastinio optimizavimo metodą portfeliui sudaryti.

Tarkime, kad minimali toleruojama portfelio rizika, kurios matas yra portfelio pereikvojimo tikimybė, yra 5 %. Tuomet asmuo, į pensiją išėjęs 55-erių metų, iš portfelio gali tikėtis išimti kasmet apie 3,85 % pradinės portfelio vertės, kai akcijų dalis portfelyje lygi 48,8 %. Asmuo, pensijos laikotarpio pradžioje būdamas 60-ies metų, su ta pačia rizikos tolerancija iš portfelio galės išimti apie 4,25 %, kai akcijų dalis portfelyje lygi 54,2 %. 65-erių metų asmuo iš portfelio, kurio 50,9 % sudaro akcijos, galės išimti apie 5,0 %, o 70-ies metų asmuo iš 55,2 % akcijų portfelio galės tikėtis išimti apie 6 % pradinės portfelio vertės kasmet. Kuo didesnė asmens rizikos tolerancija ir kuo vyresnis asmuo išeina į pensiją, tuo didesnė gali būti taikoma išėmimo norma.

Pažymėtina tai, kad 3,0 % išėmimo norma negarantuoja portfelio tvarumo. Net ir 70-ies metų išėjus į pensiją išlieka 0,01 % portfelio pereikvojimo tikimybė. Taikant mažesnę nei 3,0 % normą, pereikvojimo tikimybė artėja nulio link, o 2,5 % ir mažesnė išėmimo norma yra saugi (t. y. portfelio pereikvojimo tikimybė lygi nuliui) 70-ies metų asmeniui, sudariusiam portfelį euristiniu metodu.

1 pav. pavaizduotos kreivės gali būti naudojamos portfelio sudėties nustatymo metodui pasirinkti. Įvertinus investuotojo pageidaujamą prisiimti portfelio pereikvojimo riziką, kreivės kaip investuotojo naudos ir rizikos kombinacijų rinkinys padėtų priimti sprendimą, kokį metodą taikyti atsižvelgiant į investuotojo tikslus bei technines skaičiavimų galimybes.



1 pav. Portfelio pereikvojimo tikimybė pagal taikomą metodą ir asmens amžių pensijos laikotarpio pradžioje

Fig. 1. Probability of portfolio ruin according to method applied and person's age at retirement

Keičiant parengto dinaminio stochastinio imitacinio modelio parametrus galima apskaičiuoti ir kito amžiaus asmens portfelio tvarumo galimybes, nusakančias pereikvojimo tikimybes, jų standartinį nuokrypį, stebėti portfelio vertės dinamiką ateityje, prognozuoti galutinę portfelio vertę, atsižvelgiant į jos statistikas – galutinės portfelio vertės, galutinės ir pradinės portfelio vertės santykio vidurkį ir standartinį nuokrypį.

Stochastinio optimizavimo būdu sudarytų portfelių pranašumą patvirtina ir vidutinio galutinės bei pradinės portfelio vertės santykio skaičiavimo rezultatai. Euristiciniu ir daugelio horizontų metodais sudarytų portfelių analizuojamas santykis turi tendenciją mažėti didėjant išėmimo normai, tačiau stochastiškai optimalių portfelių verčių santykis išlieka gana stabilus greičiausiai dėl itin spartaus

akcijų dalies portfelyje didėjimo didinant taikomą išėmimo normą. Skaičiavimai taip pat rodo, kad vidutinio galutinės ir pradinės portfelio vertės santykio standartinis nuokrypys taip pat yra didesnis nei euristiciniu ar daugelio horizontų metodu sudarytų portfelių atvejais.

Atliktas euristiciniu, daugelio horizontų ir stochastinio optimizavimo metodais sudarytų pensijos portfelių tvarumo tyrimas su istoriniais akcijų bei obligacijų rinkų duomenimis parodė, kad stochastinio optimizavimo būdu nustatytų optimalių portfelių tvarumas yra didesnis nei euristiciniu ar daugelio horizontų metodais sudarytų portfelių, be to, stochastinio optimizavimo būdu sudaryti portfeliai užtikrina didesnę galutinę portfelio vertę, kuri gali būti naudojama finansuoti išlaidas papildomais metais ar kaip palikimas paveldėtojams.

#### 4. Išvados

1. Pensijos portfelio sudarymo metodų analizė parodė, kad optimali akcijų dalis, išimant iš portfelio daugiau nei 5,5 % pradinės portfelio vertės per metus, visais analizuojamais laikotarpiais yra didesnė nei nustatytoji euristiniu arba daugelio horizontų metodais.

2. Stochastinio optimizavimo metodu sudaryto portfelio pereikvojimo tikimybė visais analizuojamais atvejais mažesnė nei portfelį sudarant euristiniu ar daugelio horizontų metodais.

3. Stochastiškos gyvenimo trukmės įvedimas į dinaminį stochastinį imitacinį modelį parodė, kad iki šiol pensiją planuojant plačiai naudotas pastovus planuojamas pensijos laikotarpis pernelyg perversina pereikvojimo tikimybę. Portfelio pereikvojimo tikimybė, kai modelyje įvertinta stochastinė žmogaus gyvenimo trukmės prigimtis, yra vidutiniškai 14,8 procentinių punktų mažesnė nei pastovaus pensijos laikotarpio atveju.

4. Nesant stochastinio optimizavimo galimybės daugelio horizontų metodą rekomenduojama taikyti išėjusiems į pensiją nesulaukus 65-erių metų ir turintiems tikslą iš portfelio išimti 4,5 % portfelio pradinės vertės ir daugiau. 65-erių metų asmenys su aukštesne nei 5,5 % išėmimo norma taip pat turėtų portfelį sudaryti daugelio horizontų metodu. Visais kitais atvejais tiks euristinis metodas.

5. 3,0 % išėmimo norma negarantuoja portfelio tvarumo. Visais analizuojamais atvejais išlieka menka pereikvojimo tikimybė.

#### Literatūra

- Ameriks, J.; Veres, R.; Warshawsky, M. J. 2001. Making retirement income last a lifetime, *Journal of Financial Planning* 14: 60–76.
- Bengen, W. P. 1994. Determining withdrawal rates using historical data, *Journal of Financial Planning* 7(4): 171–180.
- Bengen, W. P. 1996. Asset allocation for a lifetime, *Journal of Financial Planning* 9(4): 58–67.
- Bengen, W. P. 2001. Conserving client portfolios during retirement, part IV, *Journal of Financial Planning* 14: 110–119.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 1998. Retirement savings: Choosing a withdrawal rate that is sustainable, *Journal of the American Association of Individual Investors* 20: 16–21.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 1999. Sustainable withdrawal rates from your retirement portfolio, *Financial Counselling and Planning* 10(1): 39–47.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 2001. Withdrawing money from your retirement portfolio without going broke, *Journal of Retirement Planning* 4(4): 35–41.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 2003. A comparative analysis of retirement portfolio success rates: simulation versus overlapping periods, *Financial Services Review* 16: 115–128.
- Cordell, D. M. 2005. A multiple-horizon approach to asset allocation in retirement portfolio, *Journal of Financial Planning* 8(5): 34–39.
- Guyton J. T. 2004. Decision Rules for Portfolio Management for Retirees: Is the 'Safe' Initial Withdrawal Rate Too Safe? *Journal of Financial Planning* 17(10): 54–61.
- Ho, K.; Milevsky, M. A.; Robinson, C. 1994. Asset allocation, life expectancy, and shortfall, *Financial Services Review* 3(2): 109–126. doi:10.1016/1057-0810(94)90017-5
- Milevsky, M. A.; Ho, K.; Robinson, C. 1997. Asset allocation via the conditional first exit time or how to avoid outliving your money, *Review of Quantitative Finance and Accounting* 9: 53–70. doi:10.1023/A:1008278910581
- Milevsky, M. E.; Robinson, C. 2005. A sustainable spending rate without simulation, *Financial Analysts Journal* 61: 89–100. doi:10.2469/faj.v61.n6.2776
- Mitchell, J. B. 2009. *Withdrawal Rate Strategies for Retirement Portfolios: Preventive Reductions and Risk Management* [interaktyvus], [žiūrėta 2010 m. gegužės 23 d.]. Prieiga per internetą: <<http://ssrn.com/abstract=1489657>>.
- Smith, G.; Gould, D. P. 2007. Measuring and Controlling Shortfall risk in retirement, *The Journal of Investing* 16(1): 82–95. doi:10.3905/joi.2007.681826
- Spitzer, J. J. 2008. Retirement withdrawals: an analysis of the benefits of periodic "midcourse" adjustments, *Financial Services Review* 17: 17–29.
- Spitzer, J. J.; Strieter, J. C.; Singh, S. 2007. Guidelines for withdrawal rates and portfolio safety during retirement, *Journal of Financial Planning* 20: 52–59.
- Stout, R. G. 2008. Stochastic optimization of retirement portfolio asset allocations and withdrawals, *Financial Services Review* 17(1): 1–15.
- Stout, R. G.; Mitchell, J. B. 2006. Dynamic retirement withdrawal planning, *Financial Services Review* 15(2): 117–131.
- Terry, R. L. 2003. The relationship between portfolio composition and sustainable withdrawal rates, *Journal of Financial Planning* 16(5): 64–78.
- Tezel, A. 2004. Sustainable retirement withdrawals, *Journal of Financial Planning* 17(7): 52–57.
- Weiss, G. R. 2001. Dynamic rebalancing, *Journal of Financial Planning* 14(2): 100–106.