



## SLUOKSNIUOTAS ELEMENTAS DKT\_CST ANIZOTROPINIŲ PLOKŠTELIŲ ANALIZEI

Edvard Michnevič

*Teorinės mechanikos katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
El. paštas [edmich@fm.vtu.lt](mailto:edmich@fm.vtu.lt)*

*Įteikta 2006-09-20; priimta 2007-02-15*

**Santrauka.** Naudojant efektyvų diskretinės Kirchhofo teorijos baigtinį elementą DKT, suformuluotas naujas baigtinis elementas lenkiamosioms daugiasluoksniams plokštelėms, sudarytoms iš kelių bet kokia tvarka išdėstytų sluoksnių, modeliuoti. Kiekvieno sluoksnio medžiaga gali būti skirtinga ir ortotropinė. Trikampis elementas turi po 6 laisvumo laipsnius kiekviename mazge: 3 linijinius poslinkius ir 3 posūkius apie koordinatinių ašis. Šeštasis, fiktyvus, posūkis apie statmeną elemento plokštumai ašį naudojamas dėl skaitinių reikalavimų. Elementas apima visus deformacijų ir įtempių efektus tiek elemento plokštumoje, tiek statmena šiai plokštumai kryptimi išskyrus šlytį. Elementas gali būti taikomas lenkiamosioms plokštelėms arba sijoms, kurioms šlyties įtaka nedidelė, skaičiuoti. Pateikti skaitiniai pavyzdžiai, rezultatai palyginti su analitiniais bei aprobuotais skaitiniais sprendiniais.

**Reikšminiai žodžiai:** sluoksniuotos plokštelės, kompozitai, kompozitinės struktūros, baigtinis elementas, netiesinė analizė.

## THE LAYERED ELEMENT DKT\_CST FOR ANALYSIS OF ANISOTROPIC PLATES

Edvard Michnevič

*Dept of Engineering Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University,  
Saulėtekio al 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania  
E-mail: [edmich@fm.vtu.lt](mailto:edmich@fm.vtu.lt)*

*Received 20 September 2006; accepted 15 February 2007*

**Abstract.** The new finite element of multilayered built up with an arbitrary series of layers plate for plate bending problem is formulated on the ground of widely used, effective finite element Discrete Kirchhof Theory (DKT). The material of each layer is supposed to be different and orthotropic. Triangular element has 6 d.o.f.'s at each of 3 nodal points: 3 displacements and 3 rotations about co-ordinate axes. The element takes into account all the in-plane/out-of-plane effects except for shear. The element could find an application in the slab bending problems or in the plate, where the shear influence could be neglected, bending problems. Numerical examples are presented. Present solutions are compared with available analytical and numerical solutions.

**Keywords:** composites, composite structures, layered plates, non-linear analysis, finite element.

### 1. Įvadas

Pastaruoju metu įvairių medžiagų derinimas tapo vienu iš pagrindinių būdų naujoms medžiagoms sukurti. Kartu su naujomis kompiuterinėmis technologijomis tobulėja įvairiausių medžiagų savybių ir konstrukcijų charakteris-

tikų analizės bei techninės modeliavimo galimybės. Tai leidžia sukurti medžiagas, kurių savybes galima numatyti iš anksto ir atveria plačią galimybių racionalioms ir tuo pat metu patikimoms inžinerinėms konstrukcijoms kurti.

Dėl ypač gerų mechaninių savybių, palyginti nedidelio

svorio ir galimybės iš anksto parinkti tinkamas medžiagos charakteristikas kompozitai plačiai naudojami ne tik sudėtingų technologijų – aviacijos, kosmoso ir karinės pramonės srityse, bet ir civilinėje pramonėje. Tačiau konstrukcijų, pagamintų iš kompozitinių medžiagų, kūrimas ir praktinis taikymas visų pirma remiasi mokėjimu šias konstrukcijas modeliuoti. Reikia pažymėti, kad sluoksniuotų plokštelių-membranų analizės klausimai gana gerai ištirti, todėl daugiausia dėmesio skiriama lenkiamųjų sluoksniuotų plokštelių modeliavimo klausimams. Nors sluoksninės struktūros plačiai naudojamos, šiuolaikinių sluoksniuotų kompozitų netiesinio deformavimo ir irimo teorijos bei matematinio modeliavimo metodai iki šiol nėra išbaigti. Dėl sluoksninėms struktūroms būdingų anizotropijos savybių nagrinėti visi tempimo ir gniuždymo bei lenkimo efektai, lenkimo-membraninių ir membraninių-šlyties efektų sąveikavimo reiškiniai. Sluoksninėms struktūroms modeliuoti dažnai taikomas baigtinių elementų metodas. Sukurta gana daug baigtinių elementų konstrukcijoms, pagamintoms iš tradicinių medžiagų, modeliuoti. Tačiau sluoksniuotų plokštelių lenkiamųjų plokštelių uždaviniams, kur galima taikyti tik kelias deformacijų-įtempimų būvį supaprastinančias prielaidas, reikia specialių sluoksniuotų baigtinių elementų. Tikslūs baigtiniai elementai [1] dėl sudėtingo matematinio modelio dažnai yra sunkiai realizuojami taikomojo pobūdžio programose. Todėl išlieka gana tikslūs, efektyvių praktiškos formos baigtinių elementų sluoksniuotoms lenkiamosioms plokštelėms, kurioms nebūtų keliama jokių skerspjūvio simetrijos reikalavimų, poreikis.

Darbe pateiktos naujos optimizuotos sluoksniuoto trikampio baigtinio elemento DKT\_CST, kuriame įvertinti visi minėti membraniniai ir lenkimo poveikių efektai [2], tačiau atsisakyta šlyties efektų, struktūrinių matricų išraiškos. Šis baigtinis elementas gali būti panaudotas sluoksniuotoms anizotropinėms lenkiamosioms plokštelėms, atskiroms plokštelių zonoms arba sijoms modeliuoti, kai šlyties deformacijos nėra itin svarbios.

## 2. Matematiniai modeliai

Dėl membraninių įtempimų įtakos tikrieji plokštelės poslinkiai yra daug mažesni už nustatytus pagal tiesinę teoriją. Diskretųjį tokio uždavinio modelį [3] galima užrašyti kaip netiesinių algebrinių lygčių sistemą:

$$[K(\delta)]\delta - \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

čia ansamblio standumo matrica priklauso nuo poslinkių  $\delta$  dydžio;  $\mathbf{F}$  – išorinių apkrovų vektorius.

Netiesinių lygčių sistemoms spręsti taikomas iteracinis Niutono ir Rafsono metodas [4, 5]. Kiekviename iteracinio proceso žingsnyje apytikslis sprendinys  $\delta_n$ , kuriam išorinių ir vidinių jėgų nesąryšis  $\Psi_n \neq 0$ , patikslinamas sprendžiant tiesinių lygčių sistemą:

$$\Delta\delta_{n+1} = -[K_T]_n^{-1}\Psi_n, \quad (2)$$

$$[K_T] = [K_0] + [K_\sigma] + [K_L], \quad (3)$$

čia:  $[K_T]$  – tangentinių standumų matrica;  $[K_0]$  – tiesinė standumo matrica;  $[K_\sigma]$  – pradinių įtempimų matrica;  $[K_L]$  – didelių poslinkių matrica. Nesąryšis  $\Psi_n$  skaičiuojamas pagal įtempimus  $\sigma_n$ :

$$\Psi(\delta) = \int_V [\bar{B}]^T \sigma dV - \mathbf{F} = 0, \quad (4)$$

čia  $[\bar{B}]$  – netiesinė matrica, deformacijas susiejanti su poslinkiais.

Atskiras geometriškai netiesinio uždavinio atvejis yra pradinio pastovumo uždavinys [3], kai matrica  $[K_L] = 0$ .

Dinamikos uždaviniai aprašomi lygtimi:

$$[K_0]\delta + [C]\frac{\partial}{\partial t}\delta + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta + \mathbf{F} = 0, \quad (5)$$

čia  $[C]$  ir  $[M]$  – slopinimo ir masių matricos.

Atskiras dinamikos uždavinio atvejis yra tikrinių reikšmių uždavinys [3, 6], kai matrica  $[C] = 0$  ir  $\mathbf{F} = 0$ .

## 3. Elemento DKT\_CST formulavimas

Baigtinis elementas suformuluotas kaip lenkiamojo (DKT) ir membraninio (CST) elementų derinys [2, 7]. CST elementas turi tris mazgus, pirmosios eilės interpoliacinę funkciją ir po du laisvės laipsnius – poslinkius kiekviename mazge. DKT elementas [8] turi tris mazgus ir tris laisvės laipsnius – įlinkį ir du posūkius kiekviename mazge, elemento interpoliacinė funkcija turi atitikti  $C^0$  suderinamumo reikalavimus. Kompozitinės plokštelės ryšis tarp įtempimų ir deformacijų [9, 10] užrašomas taip:

$$\mathbf{N} = [D^{pl}] \mathbf{e}^0 + [D^{plb}] \mathbf{k},$$

$$\mathbf{M} = [D^{plb}] \mathbf{e}^0 + [D^b] \mathbf{k}, \quad (6)$$

čia:  $\mathbf{N}$  ir  $\mathbf{M}$  – membraniniai bei lenkimo įtempiai;  $[D^{pl}]$ ,  $[D^{plb}]$ ,  $[D^b]$  – akumuliacinės tamprumo matricos, kurios gaunamos sudedant sluoksnių tamprumo matricas [7, 11];  $\mathbf{e}^0$  – vidurinio paviršiaus membraninės deformacijos;  $\mathbf{k}$  – kreivių vektorius.

Lenkimo deformacijos sukelia deformacijas plokštumoje, ir atvirkščiai (6). Šis efektas įvertinamas pagal jungiamųjų standumų matricą  $[K_0^{plb}]$ .

Elemento struktūrinės matricos sudaromos iš membraninio ir lenkiamojo elementų matricų, kurios sujungiamos į globaliąją elemento matricą taip, kaip to reikia elemento laisvės laipsniams išdėstyti.

Elemento kiekvieno mazgo laisvės laipsnių vektorius:

$$\delta_i = \{u_i, v_i, \omega_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T, \quad (7)$$

čia:  $u_i, v_i, \omega_i$  – mazgo poslinkiai;  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  – mazgo posūčiai aplink atitinkamas ašis.

Elemento standumo matrica:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} [K_0^{pl}] & [K_0^{plb}] \\ [K_0^{plb}]^T & [K_0^b] \end{bmatrix}, \quad (8)$$

čia  $[K_0^{pl}]$ ,  $[K_0^b]$  ir  $[K_0^{plb}]$  – membraninė, lenkimo ir jungiamųjų standumų matricos.

$$[K_0^{pl}] = A [B_0^{pl}]^T [D^{pl}] [B_0^{pl}], \quad (9)$$

čia  $[B_0^{pl}]$  – tiesinė membraninė geometrinė matrica [2]. Matricos  $[K_0^{pl}]$  elementai skaičiuojami taip:

$$[K_{0ij}^{pl}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} d_{11}^{pl} b_i b_j + d_{33}^{pl} c_i c_j & d_{12}^{pl} b_i c_j + d_{33}^{pl} c_i b_j \\ d_{12}^{pl} c_i b_j + d_{33}^{pl} b_i c_j & d_{22}^{pl} c_i c_j + d_{33}^{pl} b_i b_j \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

čia:  $A$  – elemento plotas;  $d_{ij}^{pl}$  – akumuliacinės membraninės tamprumo matricos  $[D^{pl}]$  elementai;  $b_i$  ir  $c_i$  – geometriniai koeficientai. Globalioji matrica yra sudaroma iš 9 tokių blokų.

$$[K_0^b] = \int_V [B_0^b]^T [D^b] [B_0^b] dV, \quad (11)$$

čia  $[B_0^b]$  – tiesinė lenkimo geometrinė matrica [2].

Kai ką pertvarkius [7], atskiro matricos elemento išraiška užrašoma taip:

$$K_{0ij}^b = \frac{1}{4A} \sum_{ii=1}^3 \sum_{jj=1}^3 \sum_{iii=1}^3 \sum_{jjj=1}^3 \left[ d_{11}^b X_{i,ii} X_{j,jj} b_{iii} b_{jjj} + \right. \\ \left. d_{22}^b Y_{i,ii} Y_{j,jj} c_{iii} c_{jjj} + d_{12}^b (Y_{i,ii} X_{j,jj} c_{iii} b_{jjj} + X_{i,ii} Y_{j,jj} b_{iii} c_{jjj}) + \right. \\ \left. d_{33}^b (X_{i,ii} X_{j,jj} c_{iii} c_{jjj} + X_{i,ii} Y_{j,jj} c_{iii} b_{jjj} + Y_{i,ii} X_{j,jj} b_{iii} c_{jjj} + \right. \\ \left. Y_{i,ii} Y_{j,jj} b_{iii} b_{jjj}) \right] \int_A \frac{\partial N_{iiz} \partial N_{jjz}}{\partial L_{iii} \partial L_{jjj}} dA, \\ i = 1, 2, \dots, 9, \quad j = 1, 2, \dots, 9, \quad (12)$$

čia:  $d_{ij}^b$  – akumuliacinės lenkimo tamprumo matricos  $[D^b]$  elementai;  $N_i$  – interpoliacinės funkcijos;  $X_{i,ii}$  ir  $Y_{i,ii}$  – interpoliacinių funkcijų koeficientai;  $b_{iii}$  ir  $c_{iii}$  – geometriniai koeficientai; integralų skaičiavimas aprašytas toliau.

$$[K_0^{plb}] = \int_V [B_0^{pl}]^T [D^{plb}] [B_0^b] dV. \quad (13)$$

Atlikus minėtus pertvarkymus, gautos tokios matricos  $[K_0^{plb}]$  elementų išraiškos:

$$K_{0(2i-1)j}^{plb} = \frac{1}{2A} \sum_{jj=1}^3 \sum_{jjj=1}^3 \left[ (d_{11}^{plb} b_i X_{j,jj} + d_{33}^{plb} c_i Y_{j,jj}) b_{jjj} + \right. \\ \left. (d_{12}^{plb} b_i Y_{j,jj} + d_{33}^{plb} c_i X_{j,jj}) c_{jjj} \right] \int_A \frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}} dA, \quad (14)$$

$$K_{0(2i)j}^{plb} = \frac{1}{2A} \sum_{jj=1}^3 \sum_{jjj=1}^3 \left[ (d_{12}^{plb} c_i X_{j,jj} + d_{33}^{plb} b_i Y_{j,jj}) b_{jjj} + \right. \\ \left. (d_{22}^{plb} c_i Y_{j,jj} + d_{33}^{plb} b_i X_{j,jj}) c_{jjj} \right] \int_A \frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}} dA, \quad (15)$$

čia:  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 9$ ;  $d_{ij}^{plb}$  – akumuliacinės jungiamosios tamprumo matricos  $[D^{plb}]$  elementai.

Elemento pradinių įtempių matrica:

$$[K_\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_\sigma^b] \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$[K_\sigma^b] = \int_V [G]^T [T] [G] dV, \quad (17)$$

čia: matrica  $[G]$  priklauso tik nuo koordinatų [6];  $[T]$  – membraninių įtempių matrica.

Atlikus pertvarkymus [7], gauta atskiro matricos  $[K_\sigma^b]$  elemento išraiška:

$$[K_{\sigma ij}^b] = \sum_{ii=1}^3 \sum_{jj=1}^3 \left[ X_{i,ii} X_{j,jj} T_x + Y_{i,ii} Y_{j,jj} T_y + \right. \\ \left. (X_{i,ii} Y_{j,jj} + Y_{i,ii} X_{j,jj}) T_{xy} \right] \int_A N_{iiz} N_{jjz} dA, \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, 9, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

čia  $T_x, T_y, T_{xy}$  – membraniniai įtempiai.

Elemento didelių poslinkių standumo matrica:

$$[K_L] = \int_V \begin{bmatrix} 0 & [K_L^{plb}] \\ [K_L^{plb}]^T & [K_L^b] \end{bmatrix} dV, \quad (19)$$

čia  $[K_L^b]$  ir  $[K_L^{plb}]$  – netiesinės lenkimo ir jungiamųjų standumų matricos.

$$[K_L^{plb}] = \int_V [B_0^{pl}]^T [D^{plb}] [B_L^b] dV, \quad (20)$$

čia  $[B_L^b]$  – netiesinė lenkimo geometrinė matrica [3].

Atlikus pertvarkymus [7], gautos tokios matricos  $[K_L^{plb}]$  elementų išraiškos:

$$K_L^{plb}{}_{i,j} = \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^9 \sum_{jj=1}^3 \sum_{kk=1}^3 \left[ \delta_k^b \times (X_{j,jj} X_{k,kk} \times \right. \\ \left. (b_i d_{11}^{pl} + c_i d_{31}^{pl}) + Y_{j,jj} Y_{k,kk} (b_i d_{12}^{pl} + c_i d_{32}^{pl}) + \right. \\ \left. (Y_{j,jj} X_{k,kk} + X_{j,jj} Y_{k,kk}) (b_i d_{13}^{pl} + c_i d_{33}^{pl}) \right] \times \\ \int_A N_{jjz} N_{kkz} dA, \quad (21)$$

$$K_L^{plb}{}_{(i+1),j} = \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^9 \sum_{jj=1}^3 \sum_{kk=1}^3 \delta_k^b \times (X_{j,jj} X_{k,kk} \times (b_l d_{31}^{pl} + c_l d_{21}^{pl}) + Y_{j,jj} Y_{k,kk} (b_l d_{32}^{pl} + c_l d_{22}^{pl}) + (Y_{j,jj} X_{k,kk} + X_{j,jj} Y_{k,kk}) (b_l d_{33}^{pl} + c_l d_{23}^{pl})) \times \int_A N_{jjz} N_{kkz} dA, \quad (22)$$

$$i = 1, 3, 5, \quad j = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

čia  $\delta_k^b$  – lenkiamojo elemento mazgo poslinkis arba posūkis (7).

$$[K_L^b] = \int_V \left[ [B_0^b]^T [D^{plb}]^T [B_L^b] + [B_L^b]^T [D^{plb}] [B_0^b] + [B_L^b]^T [D^{pl}] [B_L^b] \right] dV. \quad (23)$$

$$[K_L^b] = [K_{LB}^b]^T + [K_{LB}^b] + [K_{LC}^b]. \quad (24)$$

Atlikus pertvarkymus [7], matricų  $[K_{LB}^b]$  ir  $[K_{LC}^b]$  atskirų elementų išraiškos užrašomos taip:

$$K_{LB}^b{}_{ij} = \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^9 \sum_{ii=1}^3 \sum_{jj=1}^3 \sum_{kk=1}^3 \delta_k^b \times \left[ \left( X_{i,ii} X_{k,kk} d_{11}^{plb} + Y_{i,ii} Y_{k,kk} d_{21}^{plb} + (Y_{i,ii} X_{k,kk} + X_{i,ii} Y_{k,kk}) d_{31}^{plb} \right) X_{j,jj} b_{jjj} + \left( X_{i,ii} X_{k,kk} d_{12}^{plb} + Y_{i,ii} Y_{k,kk} d_{22}^{plb} + (Y_{i,ii} X_{k,kk} + X_{i,ii} Y_{k,kk}) d_{32}^{plb} \right) Y_{j,jj} c_{jjj} + \left( X_{i,ii} X_{k,kk} d_{13}^{plb} + Y_{i,ii} Y_{k,kk} d_{23}^{plb} + (Y_{i,ii} X_{k,kk} + X_{i,ii} Y_{k,kk}) d_{33}^{plb} \right) \times (X_{j,jj} c_{jjj} + Y_{j,jj} b_{jjj}) \right] \times \int_A N_{iiz} N_{kkz} \frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}} dA, \quad (25)$$

$$i = 1, 2, \dots, 9, \quad j = 1, 2, \dots, 9.$$

$$K_{LC}^b{}_{ij} = \sum_{k=1}^9 \sum_{ii=1}^3 \sum_{jj=1}^3 \sum_{kk=1}^3 \delta_k^b \delta_l^b \times \left[ X_{k,kk} X_{l,ll} \left( X_{i,ii} X_{j,jj} d_{11} + X_{i,ii} Y_{j,jj} d_{13} + (X_{i,ii} X_{j,jj} d_{31} + Y_{i,ii} Y_{j,jj} d_{33}) \right) + Y_{k,kk} Y_{l,ll} \left( Y_{i,ii} Y_{j,jj} d_{22} + Y_{i,ii} X_{j,jj} d_{23} + (X_{i,ii} Y_{j,jj} d_{32} + X_{i,ii} X_{j,jj} d_{33}) \right) + X_{k,kk} Y_{l,ll} \left( X_{i,ii} Y_{j,jj} d_{12} + Y_{i,ii} X_{j,jj} d_{21} + X_{i,ii} X_{j,jj} d_{31} + Y_{i,ii} Y_{j,jj} d_{32} + Y_{i,ii} Y_{j,jj} d_{23} + X_{i,ii} Y_{j,jj} d_{33} + X_{i,ii} X_{j,jj} d_{13} + Y_{i,ii} X_{j,jj} d_{33} \right) \right] \times \int_A N_{iiz} N_{jjz} N_{kkz} N_{llz} dA, \quad (26)$$

$$i = 1, 2, \dots, 9, \quad j = 1, 2, \dots, 9.$$

Išorinių ir vidinių jėgų nesąryšis (4) skaičiuojamas taip:

$$\Psi_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} [K_L^{plb}] \delta_i^b \\ \left[ [K_L^{plb}] \delta_i^{pl} + \frac{1}{2} [K_{LB}^b]^T \delta_i^b + \left[ [K_{LB}^b] \delta_i^b + \frac{1}{2} [K_{LC}^b] \delta_i^b \right] \right) \end{array} \right\}, \quad (27)$$

čia:  $i$  – iteracijos numeris; matricos  $[K_L^{plb}]$ ,  $[K_{LB}^b]$  ir  $[K_{LC}^b]$  formuojamos pagal  $(i-1)$  iteracijoje suskaičiuotus poslinkius  $\delta_i^{pl}$  ir  $\delta_i^b$ .

$$\text{Integralų} \quad \int_A \frac{\partial N_{jjz}}{L_{jjj}} dA, \quad \int_A \frac{\partial N_{iiz}}{L_{iii}} \frac{\partial N_{jjz}}{L_{jjj}} dA,$$

$\int_A N_{iiz} N_{kkz} \frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}} dA$ ,  $\int_A N_{iiz} N_{jjz} N_{kkz} N_{llz} dA$  reikšmės suskaičiuotos pagal paketą *Mathematica* ir saugomos masyvuose.

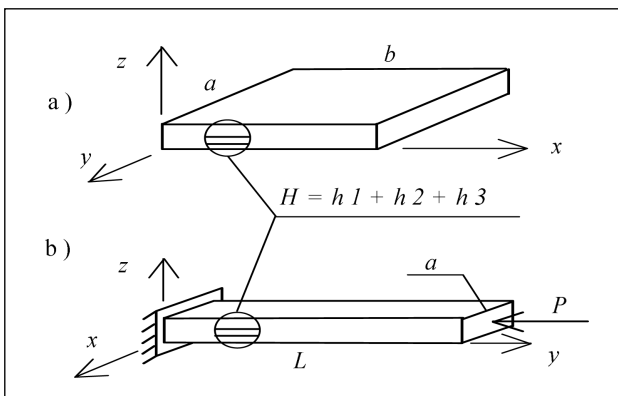
Atrinkti naudojami indeksai  $iiz = \frac{i-3}{3} 3 + ii$ , skaičiuojami pagal sveikaskaičio skaičiavimo taisykles. Toliau standumo matricos elementai sintezuojami skaitiškai. Toks matricos formavimo metodas pranašesnis už tradicinį skaitinį integravimą, nes skaičiuoti reikia mažiau laiko, be to, tai leidžia išvengti visų su skaitiniu integravimu susijusių paklaidų.

#### 4. Skaitiniai pavyzdžiai

Tiesinio skaičiavimo rezultatai naudojami geometriškai netiesiniams skaičiavimams ir optimizavimo uždaviniams spręsti. Todėl elemento tikslumas ir konvergavimo charakteristikos visų pirma buvo ištytos tiesiniams lenkiamųjų sluoksniuotų plokštelių uždaviniams. Tiesinių skaičiavimų rezultatų analizė rodo, kad suformuotas baigtinis elementas yra tikslus ir turi geras konvergavimo charakteristikas. Todėl šiame darbe elemento kokybę demonstruosime tikrinių reikšmių geometriškai netiesiniam ir pradinio pastovumo uždaviniams.

##### 4.1. Modalinė analizė – tikrinių reikšmių uždavinys

Skaičiuoti parinkta neįtvirtinta trijų sluoksnių kvadratinė plokštelė (1 pav., a). Kad nebūtų prarastos kai kurios svyravimų formos, nagrinėjama visa plokštelė neįvertinus simetrijos sąlygų. Plokštelės sluoksnių storai:  $h_1 = 0,1$ ,  $h_2 = 0,15$ ,  $h_3 = 0,25$ ;  $a = b = 4,0$ ; tamprumo moduliai  $E_{11} = E_{22} = 2 \times 10^6$ ; sluoksnių ortotropijos ašių orientacija 0/0/0; Puasono koeficientai  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ ; šlyties moduliai  $G_{12} = 0,77 \times 10^6$ ; tankiai  $\rho = 1000$ . Skaičiavimo rezultatų lyginimas su analitiniais [12] sprendiniais pateiktas 2 pav. ir 1 lentelėje. Nenulinės formos pateiktos 3 pav.



1 pav. Skaičiuojamosios schemas

Fig 1. Computational schemas

1 lentelė. Pirmieji šeši nenuliniai dažniai

Table 1. The first six non-zeroes eigenfrequencies

	Elementų DKT_CST skaičius					Anali- tiniai rezultatai
	8	32	72	128	200	
1	15,47	26,19	29,10	30,17	30,34	31,0
2	24,31	45,31	54,29	58,31	60,36	61,8
3	42,41	74,66	86,56	91,70	94,27	95,0
4	48,44	121,5	158,0	175,0	183,9	–
5	83,54	160,4	181,8	190,1	194,1	–
6	128,5	359,2	453,3	502,0	528,8	–

Nagrinėjamos plokštelės pirmosios 6-osios nulinės formos atitinka kietojo kūno judesius. Rezultatų konvergavimo kreivės rodo, kad DKT\_CST elemento sprendiniai greitai konverguoja esant tiksliam sprendimui. Pirmojo tikrinio dažnio tiksli reikšmė gauta sudalijus plokštelę į 128 elementus.

4.2. Pradinio pastovumo uždavinys

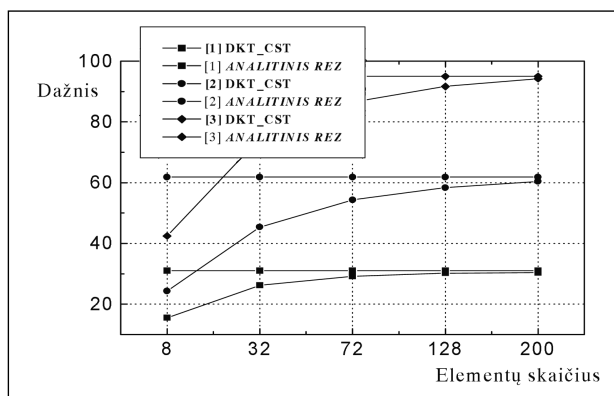
Skaičiuoti parinktas trijų sluoksnių strypas (1 pav., b). Jo ilgis  $L = 10$ ; plotis  $a = 1,6$ ; sluoksnių storiai:  $h_1 = 0,3$ ,  $h_2 = 0,5$ ,  $h_3 = 0,8$ ; tamprumo moduliai  $E_{11} = E_{22} = 2 \times 10^6$ ; Puasono koeficientai  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ ; šlyties moduliai  $G_{12} = 0,77 \times 10^6$ ; apkrova  $P = 1,5$ .

Rastos kritinės jėgos ir atitinkamos pusiausvyros formos. Skaičiavimo rezultatai pateikti 2 lentelėje ir 4 pav.

Naudojant elementą, rastos tikslios pirmųjų kritinių jėgų reikšmės. Vieno procento skirtumas tarp analizinės ir suskaičiuotos pirmosios kritinės jėgos reikšmės gautas tinkleliu, sudarytu iš 80 elementų.

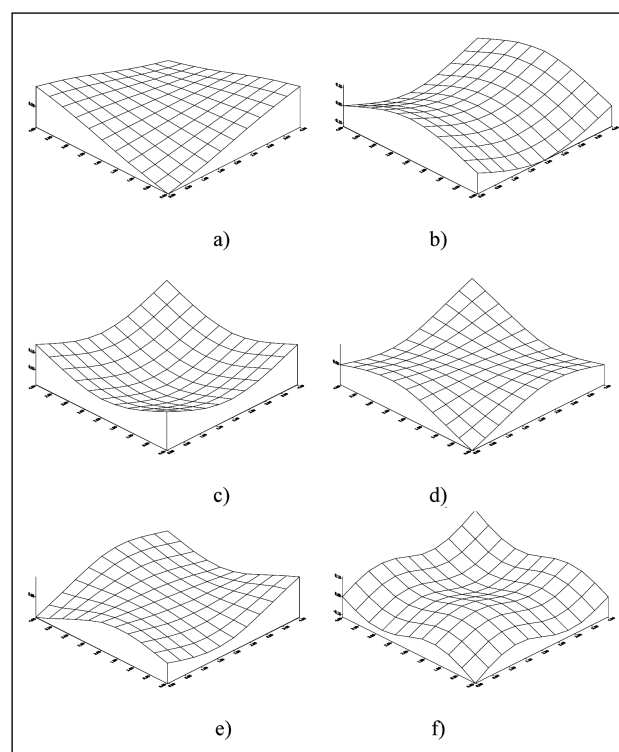
4.3. Geometriškai netiesinis uždavinys

Skaičiuoti parinkta standžiai įtvirtinta trijų sluoksnių kvadratinė plokštelė (1 pav., a), koncentruota apkrova  $P$  pridėta centre. Plokštelės sluoksnių storiai:  $h_1 = 0,2$ ,  $h_2 = 0,3$ ,  $h_3 = 0,5$ ;  $a = b = 5,0$ ; tamprumo moduliai  $E_{11} = E_{22} = 2 \times 10^6$ ; sluoksnių ortotropijos ašių orientaci-



2 pav. Pirmųjų trijų nenolinių dažnių konvergavimas

Fig 2. Convergence of the first three eigenfrequencies



3 pav. Pirmosios šešios nenulinės formos

Fig 3. The first six eigenvectors

2 lentelė. Pirmoji kritinė jėga, skaičiavimų rezultatai

Table 2. The first critical force. Results of calculation

Elementų skaičius	$P_{kr}$ (DKT_CST)	$P_{kr}$ (analitinė)	Paklaida, [%]
20	18 305,42	18 054,76	1,39
80	18 305,16		1,38
180	18 291,22		1,31
320	18 287,16		1,29
500	18 284,32		1,27

ja  $0/45/90$ ; Puasono koeficientai  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ ; šlyties moduliai  $G_{12} = 0,77 \times 10^6$ .

Skaičiavimo rezultatai rodo, kad membraninių deformacijų efektas pasireiškia, kai įlinkiai viršija 0,2 plokštelės storio  $h$  (5 pav.). Kai tiesinio įlinkio reikšmė 0,25  $h$ , skirtumas tarp netiesinių sprendinių, gautų su elementais DKT\_CST ir TRIPLT, sudarė 0,08 %.

## 5. Išvados

Pasiūlytas baigtinis elementas skaitiškai iširtas lyginant geometriškai tiesinės ir netiesinės statikos bei tikrinių reikšmių uždaviniams gautus rezultatus su žinomais analitiniais sprendiniais arba su aprobuotais baigtinių elementų metodo sprendiniais. Skaitinių tyrimų rezultatų analizė rodo, kad elementas turi geras konvergavimo charakteristikas, yra gana tikslus ir taupus skaičiavimo laiko sąnaudų požiūriu.

Baigtinis elementas gali būti naudojamas sluoksniuotoms anizotropinėms lenkiamosioms plokštelėms, plokščių atskiroms zonoms arba sijoms modeliuoti, kai šlyties deformacijos nėra itin svarbios.

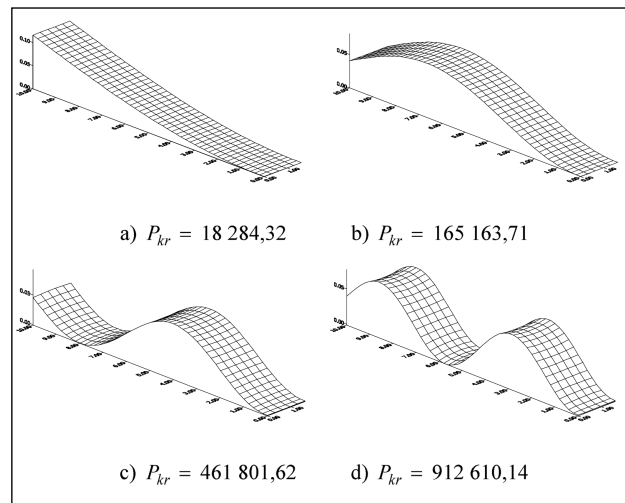
Lenkiamosioms sluoksniuotoms plokštelėms modeliuoti sudaryta programa leidžia atlikti tikslus skaičiavimus įvairiais įtvirtinimo atvejais ir gali būti panaudota projektavimo ir gamybos įmonėse.

## Literatūra

1. LAKSHMINARAYANA, H. V.; SRIDHARA MURTHY, S. A. Shear-flexible Triangular Finite Element Model for Laminated Composite Plates. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1984, No 20, p. 591–623.
2. MICHNEVIČ, E.; BELEVIČIUS, R. Sluoksniuotas DKT elementas: modalinė analizė. *Aviacija*, 1999, Nr. 4, p. 94–99.
3. ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, Vol 2, 1991. 790 p.
4. CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991. 345 p.
5. HINTON, E. *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Glasgow: Bell and Bain Ltd., 1992. 380 p.
6. BATHE, K. J.; WILSON, E. L. *Numerical method in finite element analysis*. Prentice-Hall, 1976. 524 p.
7. BELEVIČIUS, R. *Computer algebra in finite element method*. Vilnius: Technika, 1994. 154 p.
8. BATOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1980, No 15, p. 1771–1812.

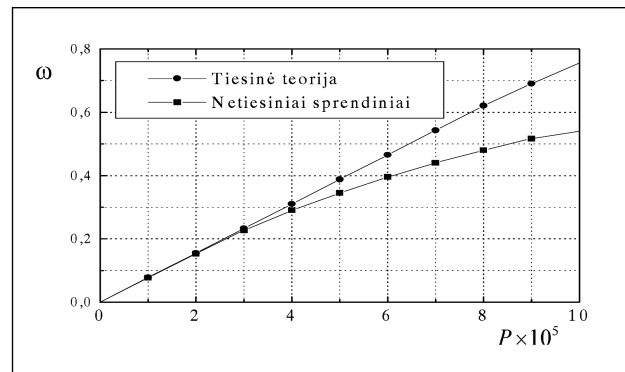
**Edvard MICHNEVIČ.** Doctor, Assoc Prof of Dept of Engineering Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius, Lithuania. E-mail: edmich@fm.vtu.lt.

Research interests: finite element methods, analysis of laminated structures.



4 pav. Pirmosios keturios pusiausvyros formos

Fig 4. The first four eigenshapes



5 pav. Centrinio mazgo įlinkis

Fig 5. Deflection of central point

9. BARBERO, E. J. *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor & Francis, Inc., 1998. 336 p.
10. REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, LLC, 1997. 800 p.
11. JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*, 2<sup>nd</sup> ed. Taylor & Francis, Inc., 1998. 519 p.
12. BIRGER, I. A.; PANOVKO, J. G. *Strength Stability Oscillation*, Vol 3. Moscow: Mashinostrojenije, 1968. 567 p. (in Russian).